



Artikel Penelitian

Model EPQ Multi Item yang Dimodifikasi untuk Dua Permintaan secara Simultan

Taufiq Rahman, Jonrinaldi, Henmaidi

Jurusan Teknik Industri, Fakultas Teknik, Universitas Andalas, Kampus Unand Limau Manis, Kecamatan Pauh, Padang, 25163, Indonesia

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:

Diterima Redaksi: 19 Januari 2017

Revisi Akhir: 8 Mei 2017

Diterbitkan Online: 16 Mei 2017

KATA KUNCI

EPQ
Permintaan diskrit
Permintaan kontinu
simultan
multi item

KORESPONDENSI

Telepon: +6285363448875

E-mail: taufiqrahman.identity@gmail.com

A B S T R A C T

Inventory is one of many factors of the business operation that need to be controlled by industries in order to improve efficiency, enhance productivity, and decrease the holding cost. The holding cost of inventories in supply chain contribute to 20% - 40% of the product value. It can be controlled by applying appropriate inventory model, such as EPQ/Economic Production Quantity and EOQ/Economic Order Quantity. EPQ is an inventory model that used to determine the optimum production lot size with balanced the production setup cost and holding cost. Even the classic EPQ has applied widely in industries, the assumption used by this model differed between the researchers whether it is continuous or discrete demand, because the multi delivery or discrete demand is mostly used by industries. Even so, there are industries that used both continuous and discrete demand simultaneously. Based on previous research, there was an advanced EPQ model that synchronizing both assumptions simultaneously, but it still addressed single item problem. Since almost the industries produced multi item, this model has lack of applicability. Therefore, this research proposed a multi item EPQ Model that synchronizing continuous and discrete demand simultaneously. The solution procedure that used in this proposed model are classical calculus method/differential calculus and simultaneous approach. A numerical example is given to show the effectiveness of the proposed approach based on the data from the literature.

1. PENDAHULUAN

Persediaan merupakan salah satu faktor yang perlu dikendalikan oleh perusahaan. Persediaan perlu dikendalikan karena biaya persediaan yang cukup besar, yaitu antara 20% - 40% per tahun dari nilai produk yang disimpan [1]. Pengendalian persediaan bertujuan agar kegiatan operasional perusahaan berjalan dengan lancar walaupun adanya variasi dan ketidakpastian *supply* dan *demand* [2], persediaan dengan jumlah besar berakibat kepada besarnya biaya persediaan, sedangkan persediaan dengan jumlah sedikit beresiko besar terhadap kehilangan konsumen akibat tidak terpenuhinya permintaan konsumen (*lost sale*). Agar memudahkan perusahaan dalam pengambilan keputusan terhadap jumlah persediaan, maka dapat digunakan model persediaan.

Model persediaan yang sering digunakan oleh perusahaan dalam manajemen persediaan adalah model persediaan EOQ/*Economic Order Quantity* dan model persediaan EPQ/*Economic Production Quantity* [3,4]. Model persediaan EOQ dan EPQ telah mengalami banyak perkembangan sesuai dengan kondisi riil pada perusahaan. Model persediaan EOQ

digunakan untuk menentukan jumlah pemesanan optimal yang akan dibeli, sedangkan model persediaan EPQ digunakan untuk penentuan ukuran lot produksi yang optimal [4].

Model persediaan EPQ yang dikemukakan pertama kali menggunakan asumsi bahwa permintaan bersifat kontinu (produk dapat dikirimkan kapan saja). Akan tetapi, penerapan yang terjadi di perusahaan cenderung tidak sesuai dengan asumsi tersebut. Kebanyakan perusahaan melakukan pengiriman produk setiap rentang waktu tertentu atau bersifat diskrit [4-6]. Akibatnya, model EPQ mengalami pengembangan untuk karakteristik permintaan yang bersifat diskrit, seperti yang dilakukan Chiu *et al.* [5], yang menghubungkan permintaan diskrit dan konsep penjaminan kualitas dalam penentuan ukuran lot produksi optimal, Chen dan Chiu [6] yang menentukan ukuran lot produksi dan jumlah pengiriman yang optimal, Taleizadeh *et al.* [4] yang menentukan harga jual optimal produk, ukuran lot produksi dan jumlah pengiriman dengan mempertimbangkan adanya kondisi *rework*, Cardenas-Barron *et al.* [7] yang menentukan ukuran lot produksi optimum untuk produksi multi item dan Chiu *et al.* [8] yang menentukan ukuran lot produksi optimum untuk produksi multi item dengan mempertimbangkan *scrap* dan *rework*.

Walaupun kebanyakan perusahaan bersifat diskrit, ada beberapa perusahaan yang memiliki permintaan diskrit dan kontinu secara bersamaan untuk produk yang sama. Perusahaan akan memproduksi produk untuk kedua jenis permintaan. Produk untuk permintaan kontinu akan dikirimkan ke konsumen setiap saat, sedangkan produk untuk permintaan diskrit akan dikirimkan sekali atau beberapa kali pengiriman dalam satu siklus produksi. Jika frekuensi pengiriman produk lebih dari satu kali dalam satu siklus produksi, maka akan terdapat sejumlah produk yang disimpan hingga periode pengiriman berikutnya.

Berdasarkan tinjauan pustaka yang dilakukan, model persediaan untuk penentuan ukuran lot produksi yang mempertimbangkan permintaan kontinu dan diskrit secara bersamaan belum banyak ditemukan. Penelitian terbaru yang mempertimbangkan permintaan diskrit dan kontinu secara bersamaan dilakukan oleh Oktavia pada tahun 2016. Oktavia [9] melakukan pengembangan terhadap model EPQ dengan mempertimbangkan permintaan diskrit dan kontinu secara simultan dalam menentukan ukuran lot produksi optimum dan frekuensi pengiriman produk. Model EPQ yang sudah dikembangkan oleh Oktavia [9] memiliki batasan hanya untuk satu jenis produk atau *single item*, sehingga tidak tepat diterapkan pada perusahaan yang memproduksi beberapa jenis produk/*multiple item*. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk merancang model penentuan ukuran lot produksi optimum dengan mempertimbangkan permintaan diskrit dan kontinu secara simultan untuk *multiple item*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persediaan

Pal *et al.* [10] berpendapat bahwa persediaan merupakan *stock* atau barang yang disimpan dekat dengan lokasi bisnis, agar dapat memenuhi permintaan. Sedangkan menurut Tersine [11], persediaan adalah material yang disimpan karena mengganggu atau dalam kondisi yang belum sempurna yang menunggu proses lebih lanjut, untuk dijual, digunakan atau diolah/ transformasi. Persediaan sebagai material yang disimpan akan memerlukan biaya selama proses penyimpanan, dengan total biaya persediaan yang ditanggung oleh sebuah perusahaan mencapai 20% - 40% per tahun dari nilai produk yang disimpan [1].

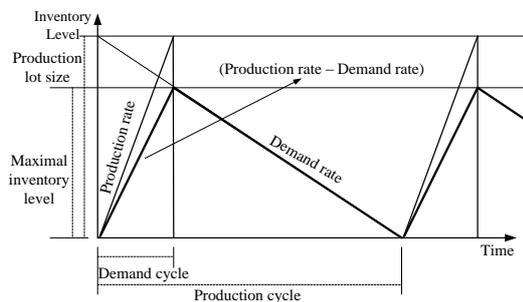
Pengendalian persediaan merupakan salah satu faktor penting untuk menciptakan sebuah perusahaan yang efektif [7], apalagi dengan adanya globalisasi bisnis yang terjadi beberapa tahun terakhir. Dengan globalisasi bisnis, perusahaan dapat membeli dan mendistribusikan bahan baku, komponen ataupun produk jadi secara global, sehingga pengendalian persediaan menjadi faktor persaingan bagi perusahaan [12]. Pengendalian persediaan bertujuan untuk menjaga kegiatan operasional, aliran produksi dan pelayanan terhadap pelanggan tetap lancar dengan skala yang ekonomis [13]. Pengendalian persediaan yang kurang baik akan menimbulkan kerugian bagi perusahaan. Kerugian tersebut dapat berupa kehilangan pelanggan akibat tidak adanya ketersediaan produk, peningkatan biaya persediaan, kebutuhan akan tempat penyimpanan yang besar, pajak dan asuransi, deteriorasi yang memerlukan proses pencegahan, dan barang yang disimpan tidak dalam keadaan baru lagi.

2.2. Permintaan Kontinu dan Diskrit

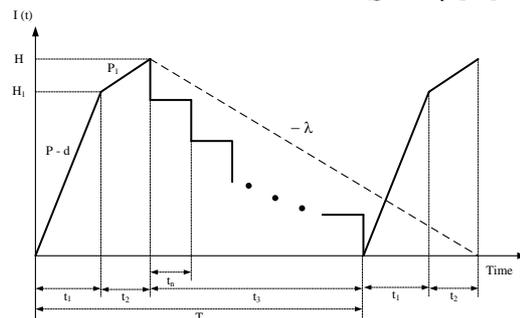
Permintaan kontinu dan diskrit yang dimaksud dalam penelitian ini adalah kebijakan perusahaan dalam memenuhi permintaan konsumen. Permintaan yang bersifat kontinu diartikan sebagai permintaan konsumen yang dapat dipenuhi setiap saat oleh perusahaan. Permintaan kontinu akan menyebabkan persediaan produk yang diproduksi perusahaan mengalami pengurangan setiap saat, yang terjadi karena adanya pengiriman yang dilakukan kepada konsumen setiap saat. Akan tetapi, pada kenyataan yang terjadi di perusahaan, beberapa perusahaan tidak mengirimkan permintaan setiap saat kepada konsumen. Perusahaan cenderung untuk melakukan pengiriman per satuan waktu atau multi pengiriman, dimana pengiriman dilakukan pada setiap rentang waktu tertentu kepada konsumen. Sistem persediaan yang melakukan pengiriman setiap satuan waktu inilah yang disebut dengan permintaan yang bersifat diskrit [4-6].

2.3. Model Persediaan EPQ

Model persediaan *Economic Production Quantity* (EPQ) atau disebut juga *Economic Manufacturing Quantity* (EMQ) dikemukakan oleh Taft pada bulan Mei 1918 [14]. Model persediaan EPQ menggunakan asumsi pada model EOQ dan ditambah dengan asumsi bahwa laju produksi ($p > 0$) bersifat konstan dan lebih besar dari laju permintaan ($p > D$) [3]. Model persediaan EPQ klasik menggunakan asumsi bahwa permintaan bersifat kontinu seperti yang terlihat pada Gambar 1 dan mengalami pengembangan untuk permintaan bersifat diskrit seperti Gambar 2.



Gambar 1. *Economic Production Quantity* [15]



Gambar 2. Model EPQ *Multi Delivery, Scrap dan Rework* [5]

Model EPQ klasik menggunakan asumsi produk yang diproduksi *single item*. Model EPQ mengalami pengembangan untuk produksi *multi item*, dengan persamaan matematis seperti persamaan 1 dan 2 [11].

$$TC(m) = \sum_{i=1}^n P_i R_i + m \sum_{i=1}^n C_i + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \frac{H_i R_i (p_i - r_i)}{p_i} \quad (1)$$

$$m^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{H_i R_i (P_i - r_i)}{P_i}}{2 \sum_{i=1}^n C_i}} \quad (2)$$

2.4. Model EPQ dengan Permintaan Diskrit dan Kontinu

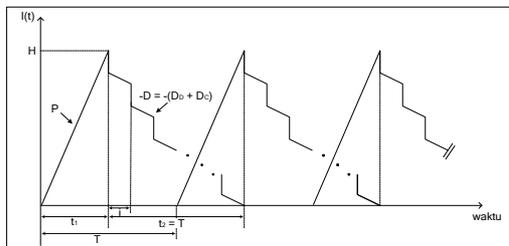
Model persediaan penentuan ukuran lot produksi yang mempertimbangkan permintaan kontinu dan diskrit secara bersamaan belum banyak ditemukan. Penelitian terbaru dilakukan oleh Oktavia [9] yang mengembangkan model *Economic Production Quantity* / EPQ dalam menentukan ukuran lot produksi dan jumlah pengiriman untuk produk *single item* dengan karakteristik permintaan bersifat kontinu dan diskrit secara simultan. Model ini menggunakan beberapa asumsi dan batasan, yaitu:

- Breakdown mesin tidak terjadi selama kegiatan produksi berlangsung.
- Deteriorasi mesin dan peralatan tidak terjadi selama kegiatan produksi.
- Tidak terdapat *imperfect product*.
- Tidak ada *safety stock*.
- Selama waktu produksi, tidak ada kegiatan konsumsi produk (*Demand* pada siklus tersebut dipenuhi berdasarkan produksi siklus sebelumnya).
- Kegiatan produksi untuk *single item*.

Gambar 3 memperlihatkan karakteristik model EPQ yang dikemukakan oleh Oktavia [9].

2.5. Formulasi Model Matematis

Formulasi model matematis merupakan salah satu tahapan dalam pemodelan sistem. Pemodelan sistem merupakan sebuah proses untuk membuat konsep terhadap bagian yang diminati dari sebuah sistem.



Gambar 3. Persediaan Model EPQ Dengan Dua Tipe Demand [9]

Berikut adalah tahapan dalam pemodelan sistem [16]:

1. Tahapan memformulasikan masalah
Langkah-langkah yang terdapat dalam tahapan ini adalah merangkum permasalahan yang ada, kemudian mengidentifikasi permasalahan untuk dianalisis dan terakhir menggambarkan sebuah sistem yang relevan. Ciri-ciri sistem nyata yang relevan terhadap permasalahan yang ada disebut juga dengan karakteristik sistem.
2. Tahapan pembuatan model matematis
Tahapan ini terdiri dari beberapa langkah, yaitu membangun model matematis, menemukan solusi model, melakukan pengujian validasi dan performansi, serta melakukan analisis terhadap sensitivitas dari solusi. Model matematis dapat diformulasikan berdasarkan fungsi tujuan, variabel dan parameter dari sistem. Langkah yang dilakukan setelah membangun model matematis adalah menentukan solusi

model atau prosedur solusi model, contohnya dengan pendekatan enumerasi, metode solusi algoritma, metode kalkulus, metode solusi heuristik dan simulasi [16].

Model matematis yang telah diformulasikan, selanjutnya dilakukan tahapan validasi dan analisis sensitivitas. Validasi terdiri dari dua bagian, yaitu validasi internal (verifikasi) dan validasi eksternal (validasi). Verifikasi digunakan untuk memeriksa apakah model matematis sudah benar secara logika dan matematis, serta penggunaan data. Verifikasi juga dilakukan dengan memperhatikan konsistensi dimensi, kesesuaian dimensi pada ruas kanan dengan ruas kiri pada persamaan matematis. Validasi menyatakan apakah model sudah bisa mewakili sistem nyata, yang dapat dinilai berdasarkan tujuan penciptaan model. Analisis sensitivitas digunakan untuk melihat bagaimana pengaruh perubahan *uncontrollable input* terhadap pencapaian solusi optimal [17].

3. Tahapan implementasi dari rekomendasi
Tahapan ini dimulai dengan merencanakan implementasi, kemudian menetapkan mekanisme *control* terhadap solusi, melakukan implementasi dari solusi, dan melakukan audit terhadap solusi tersebut.

3. METODOLOGI

Metodologi penelitian menjelaskan tentang tahapan-tahapan yang dilakukan pada sebuah penelitian. Berikut adalah tahapan-tahapan pada penelitian ini.

3.1. Studi Literatur

Studi literatur dilakukan untuk mengetahui perkembangan terkini terhadap topik penelitian yaitu model persediaan dalam penentuan ukuran lot produksi optimum. Studi literatur dilakukan dengan mempelajari jurnal, buku, maupun laporan penelitian tesis. Studi literatur mencakup tentang persediaan, model pengendalian persediaan, pemodelan sistem dan prosedur solusi model.

3.2. Identifikasi dan Perumusan Masalah

Berdasarkan studi literatur, diketahui bahwa model penentuan ukuran lot produksi optimum untuk permintaan yang bersifat kontinu dan diskrit secara bersamaan telah dikemukakan oleh Oktavia [9], namun masih terbatas kepada produk yang bersifat *single item*. Model ini tidak cocok digunakan untuk perusahaan yang memproduksi beberapa jenis produk. Sehingga, perumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana perusahaan menentukan ukuran lot produksi yang optimum untuk memenuhi permintaan produk *multi item* yang bersifat kontinu dan diskrit secara simultan.

3.3. Formulasi Model Matematis

Formulasi model penentuan ukuran lot produksi optimum *multi item* untuk permintaan kontinu dan diskrit secara simultan dilakukan dengan mengkombinasikan model persediaan EPQ *multi item* [11] dan model EPQ dengan sinkronisasi *demand* kontinu dan diskrit secara simultan [9]. Tahapan – tahapan dalam formulasi model matematis yang dilakukan adalah [13]:

1. Menentukan Karakteristik Sistem
Tahapan ini bertujuan untuk memahami sistem yang akan dimodelkan.

2. Formulasi Model

Formulasi model dilakukan untuk mendapatkan model matematis sesuai dengan karakteristik sistem. Tahapan pertama dalam formulasi model adalah melakukan penetapan fungsi tujuan, parameter dan variabel keputusan dari model. Selanjutnya, dengan memperhatikan karakteristik sistem dalam perancangan model, maka akan didapatkan model EPQ *multi item* dengan sinkronisasi permintaan diskrit dan kontinu secara simultan.

3. Validasi Model

Validasi model dilakukan untuk mengetahui apakah model yang sudah diformulasikan sudah dapat mewakili sistem nyata. Validasi model menggunakan konsep validasi internal (verifikasi), dengan menggunakan uji dimensi dan uji optimasi dengan pendekatan kalkulus (*second differential*). Uji dimensi dilakukan untuk melihat kesesuaian dimensi antara ruas kiri dan ruas kanan pada model matematis.

4. Prosedur Solusi Model

Prosedur solusi model dilakukan untuk mendapatkan solusi dari sebuah model. Prosedur solusi model dilakukan dengan menggunakan metode kalkulus/diferensial dan pendekatan simultan (*software* LINGO V14.0).

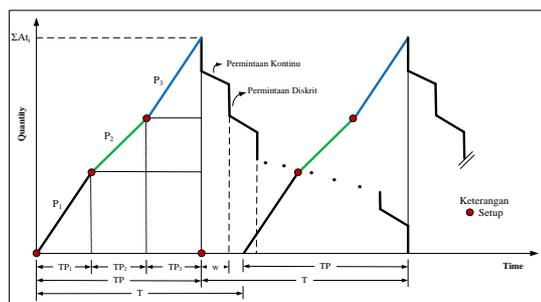
3.4. Contoh Numerik

Contoh numerik dilakukan terhadap model yang dirancang berdasarkan data numerik penelitian sebelumnya [9] dan beberapa data numerik yang relevan dengan sistem. Contoh perhitungan digunakan untuk melihat bagaimana kebijakan ukuran lot produksi optimum dan frekuensi pengiriman produk yang sebaiknya dilakukan oleh perusahaan

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Karakteristik Sistem

Sistem yang menjadi fokus penelitian ini adalah sistem persediaan-produksi dengan permintaan diskrit dan kontinu secara bersamaan untuk produksi *multi item*. Pada sistem ini, perusahaan memproduksi beberapa jenis produk dengan satu jenis mesin dan setiap pergantian jenis produk dilakukan aktivitas *setup* mesin. Pelaksanaan produksi menggunakan asumsi yang digunakan pada penelitian Oktavia [9], yaitu tidak ada konsumsi produk selama proses produksi, sehingga permintaan kontinu dipenuhi oleh kegiatan produksi periode sebelumnya atau persediaan. Gambar 4 memperlihatkan karakteristik sistem untuk sistem persediaan-produksi yang diamati.



Gambar 4. Karakteristik Sistem Persediaan-Produksi dengan 2 Tipe Permintaan ($T=2$; $i=3$; dan $TP < T$)

Berdasarkan Gambar 4, diketahui bahwa ketika proses produksi berlangsung, tidak terjadi konsumsi produk. Setelah produk selesai diproduksi, maka dilakukan kegiatan *setup* mesin dan produk yang telah selesai diproduksi disimpan terlebih dahulu hingga produk terakhir siap diproduksi. Setelah semua produk siap diproduksi, baru dilakukan pengiriman produk. Untuk permintaan diskrit, maka semua produk dikirimkan ke konsumen dalam beberapa kali pengiriman, sedangkan untuk permintaan kontinu, maka produk akan terus dikonsumsi hingga siklus produksi selanjutnya.

Sistem persediaan-produksi yang diamati memiliki beberapa batasan dan asumsi, yaitu:

1. Tidak mempertimbangkan *safety stock*.
2. Tidak mempertimbangkan *backorder* ataupun *lost sales*.
3. Tidak mempertimbangkan adanya produk cacat saat proses produksi.
4. Tidak mempertimbangkan kondisi mesin yang rusak saat proses produksi.
5. Horizon perencanaan bersifat *infinite horizon*.
6. Pengiriman produk untuk permintaan diskrit tidak mempertimbangkan kapasitas pengiriman.
7. Pengiriman permintaan diskrit hanya untuk satu konsumen.
8. Selama kegiatan produksi tidak ada konsumsi produk, sehingga permintaan kontinu dipenuhi oleh kegiatan produksi periode sebelumnya atau persediaan.
9. Jumlah permintaan diskrit dan kontinu suatu produk harus kecil atau sama dengan laju produksi tersebut.

$$(Dd_i + Dc_i) \leq P_i \tag{3}$$

10. Total rasio permintaan diskrit dan kontinu dengan laju produk harus kecil atau sama dengan kapasitas produksi yang tersedia.

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{(Dd_i + Dc_i)}{P_i} \leq 1 \right) \tag{4}$$

11. Waktu kegiatan produksi harus kecil atau sama dengan waktu pengiriman produk diskrit atau waktu siklus.

$$\left(\sum_{i=1}^n TP_i \leq T \right) \text{ atau } (TP \leq T) \tag{5}$$

4.2. Pembentukan Model Matematis

Tahapan yang dilakukan dalam pembentukan model matematis adalah:

1. Penetapan Fungsi Tujuan Model
 Penetapan fungsi tujuan model dilakukan untuk mengetahui apakah model yang akan dirancang bersifat maksimasi atau minimasi. Fungsi tujuan untuk penelitian ini adalah meminimumkan total biaya persediaan-produksi (minimasi).

$$\text{Min TIPC} = \text{TPC} + \text{TSC} + \text{TIC} + \text{TDC} \tag{6}$$
2. Parameter dan Variabel Keputusan Model
 Parameter dan variabel keputusan model dapat dilihat pada bagian Nomenklatur.
3. Perancangan Model Matematis
 Berdasarkan karakteristik sistem, terdapat beberapa biaya yang dipertimbangkan, yaitu biaya produksi, biaya *setup*, biaya simpan dan biaya pengiriman.
 - a. Biaya Produksi
 Biaya produksi merupakan biaya yang dikeluarkan untuk memproduksi sejumlah produk. Biaya produksi merupakan kuantitas produk yang diproduksi (Q) dikalikan dengan

biaya produksi per unit (Cp). Total biaya produksi per periode adalah:

$$TPC = \sum_{i=1}^n (Dd_i + Dc_i) \cdot Cp_i \quad (7)$$

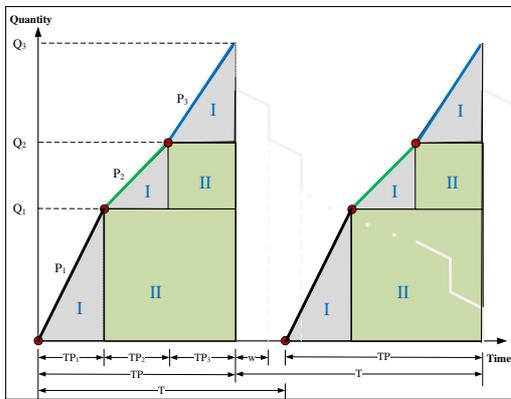
b. Biaya Setup Mesin

Biaya *setup* merupakan biaya yang dikeluarkan akibat dilakukannya kegiatan *setup* untuk proses produksi. Biaya *setup* per siklus merupakan frekuensi *setup* dalam satu siklus (1 kali *setup*) dikalikan dengan biaya *setup* (Cs). Total biaya *setup* per periode adalah:

$$TSC = \frac{\sum_{i=1}^n Cs_i}{T} \quad (8)$$

c. Biaya Simpan Persediaan

Biaya simpan merupakan biaya yang dikeluarkan akibat produk disimpan selama waktu tertentu, yang dikarenakan produk menunggu proses selanjutnya. Berdasarkan karakteristik sistem, biaya simpan terdiri atas 5 bagian, yaitu 1) biaya simpan selama proses produksi produk i , 2) biaya simpan produk i hingga periode atau waktu pengiriman, 3) biaya simpan permintaan kontinu 4) biaya simpan permintaan diskrit selama periode atau waktu pengiriman, dan 5) biaya simpan yang ditanggung oleh konsumen karena pengiriman diskrit. Gambar 5 memperlihatkan persediaan selama siklus produksi dan Gambar 6 memperlihatkan persediaan selama proses pengiriman produk. Gambar 7 memperlihatkan persediaan produk di konsumen sebagai akibat kebijakan frekuensi pengiriman untuk permintaan diskrit.



Gambar 5. Persediaan Selama Siklus Produksi

Berdasarkan Gambar 5, bagian I merupakan biaya simpan selama proses produksi berlangsung dan bagian II memperlihatkan biaya simpan produk hingga periode pengiriman.

Total biaya simpan selama produksi per periode

$$= \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i \cdot \frac{(Dd_i + Dc_i)^2}{P_i} \quad (9)$$

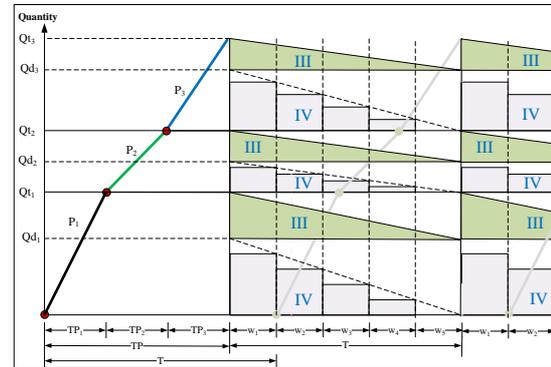
Total biaya simpan hingga pengiriman per periode

$$= T \sum_{i=1}^{n-1} H_i \cdot (Dd_i + Dc_i) \cdot \sum_{i=i+1}^n \frac{(Dd_i + Dc_i)}{P_i} \quad (10)$$

Bagian III pada Gambar 6 memperlihatkan biaya simpan untuk permintaan kontinu selama periode pengiriman dan Bagian IV memperlihatkan biaya simpan untuk permintaan diskrit selama periode pengiriman.

Total biaya simpan permintaan kontinu per periode

$$= \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n Dc_i \cdot H_i \quad (11)$$



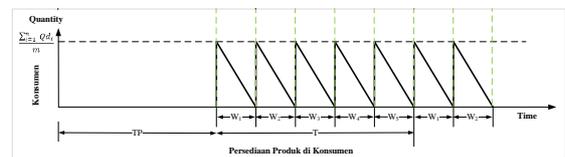
Gambar 6. Persediaan Selama Periode Pengiriman

Pada bagian IV, waktu untuk satu kali pengiriman (w) sama dengan waktu siklus (T) dibagi dengan frekuensi pengiriman (m). Sehingga, rata-rata persediaan selama periode pengiriman adalah:

$$= \left(\frac{(m-1) Qd_i}{m} \cdot w \right) + \left(\frac{(m-2) Qd_i}{m} \cdot w \right) + \dots + \left(\frac{(1) Qd_i}{m} \cdot w \right) \\ = \frac{(m-1) \cdot T \cdot Qd_i}{2m} \quad (12)$$

Total biaya simpan permintaan diskrit per periode

$$= \frac{T \sum_{i=1}^n Dd_i \cdot H_i}{2} - \frac{T \sum_{i=1}^n Dd_i \cdot H_i}{2m} \quad (13)$$



Gambar 7. Persediaan Produk di Konsumen

Berdasarkan Gambar 7, biaya simpan produk yang ditanggung konsumen merupakan biaya simpan yang ditanggung oleh konsumen sebagai akibat kebijakan penetapan jumlah produk yang akan dikirimkan ke konsumen. Biaya simpan yang ditanggung konsumen berhubungan dengan frekuensi pengiriman dan jumlah produk yang dikirimkan ke konsumen. Total biaya simpan yang ditanggung konsumen per periode adalah:

$$= \frac{1}{2m} \cdot T \cdot \sum_{i=1}^n Dd_i \cdot Hc_i \quad (14)$$

Berdasarkan kelima jenis biaya simpan yang dipertimbangkan pada sistem, maka total biaya simpan persediaan adalah:

$$TIC = \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i \cdot \frac{(Dd_i + Dc_i)^2}{P_i} + T \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ H_i \cdot (Dd_i + Dc_i) \cdot \sum_{i=i+1}^n \frac{(Dd_i + Dc_i)}{P_i} \right\} + \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i \cdot (Dd_i + Dc_i) + \frac{1}{2m} T \sum_{i=1}^n Dd_i \cdot (Hc_i - H_i) \quad (15)$$

d. Biaya Pengiriman Produk

Biaya pengiriman produk merupakan biaya yang

dikeluarkan untuk mengirimkan produk ke konsumen. Biaya pengiriman produk terdiri atas 2, yaitu biaya tetap pengiriman (*fixed delivery cost*) dan biaya variabel pengiriman produk (*variable delivery cost*). Total biaya pengiriman produk per periode adalah:

$$TDC = \frac{(m.c.f)}{T} + \sum_{i=1}^n (Dd_i + Dc_i) . Cv_i \quad (16)$$

Total biaya persediaan-produksi per periode adalah penjumlahan biaya produksi, biaya *setup*, biaya simpan dan biaya pengiriman produk.

Total biaya persediaan – produksi per periode

$$TIPC = \sum_{i=1}^n (Dd_i + Dc_i) . Cp_i + \frac{\sum_{i=1}^n Cs_i}{T} + \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i . \frac{(Dd_i+Dc_i)^2}{P_i} + T \sum_{i=1}^{n-1} H_i . (Dd_i + Dc_i) . \sum_{i=i+1}^n \frac{(Dd_i+Dc_i)}{P_i} + \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i . (Dd_i + Dc_i) + \frac{1}{2m} . T . \sum_{i=1}^n Dd_i . (Hc_i - H_i) + \frac{(m.c.f)}{T} + \sum_{i=1}^n (Dd_i + Dc_i) . Cv_i \quad (17)$$

4.3. Prosedur Solusi Model

Prosedur solusi model merupakan tahapan untuk menentukan solusi model, yang bisa dilakukan dengan banyak metode atau pendekatan, seperti pendekatan enumerasi, metode solusi algoritma, metode kalkulus, metode heuristik dan simulasi [16]. Prosedur solusi model yang digunakan pada penelitian ini adalah metode kalkulus (*differential*) dan pendekatan simultan.

4.3.1. Metode Kalkulus

Penentuan prosedur solusi model dengan metode kalkulus (*differential*) dilakukan dengan melakukan turunan pertama terhadap variabel keputusan waktu siklus (*T*) dan frekuensi pengiriman (*m*). Dengan mengubah nilai turunan pertama sama dengan nol, maka didapatkan solusi optimum model.

Diferensial terhadap frekuensi pengiriman produk untuk permintaan diskrit:

$$\frac{\partial TIPC}{\partial m} = \sum_{i=1}^n (Dd_i + Dc_i) . Cp_i + \frac{\sum_{i=1}^n Cs_i}{T} + \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i . \frac{(Dd_i+Dc_i)^2}{P_i} + T \sum_{i=1}^{n-1} H_i . (Dd_i + Dc_i) . \sum_{i=i+1}^n \frac{(Dd_i+Dc_i)}{P_i} + \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i . (Dd_i + Dc_i) + \frac{1}{2m} . T . \sum_{i=1}^n Dd_i . (Hc_i - H_i) + \frac{(m.c.f)}{T} + \sum_{i=1}^n (Dd_i + Dc_i) . Cv_i \quad \partial m \quad (18)$$

$$0 = -\frac{1}{2m^2} T \sum_{i=1}^n Dd_i . (Hc_i - H_i) + \frac{Cf}{T} \quad (19)$$

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Dd_i . (Hc_i - H_i)}{2Cf}} T \quad (20)$$

Diferensial terhadap waktu siklus:

$$\frac{\partial TIPC}{\partial T} = \sum_{i=1}^n (Dd_i + Dc_i) . Cp_i + \frac{\sum_{i=1}^n Cs_i}{T} + \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i . \frac{(Dd_i+Dc_i)^2}{P_i} + T \sum_{i=1}^{n-1} H_i . (Dd_i + Dc_i) . \sum_{i=i+1}^n \frac{(Dd_i+Dc_i)}{P_i} + \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n H_i . (Dd_i + Dc_i) + \frac{1}{2m} . T . \sum_{i=1}^n Dd_i . (Hc_i - H_i) + \frac{(m.c.f)}{T} + \sum_{i=1}^n (Dd_i + Dc_i) . Cv_i \quad \partial T \quad (21)$$

Dengan melakukan substitusi nilai *m* (persamaan 20) ke persamaan 21, maka didapatkan:

$$0 = -\frac{\sum_{i=1}^n Cs_i}{T^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n H_i . \frac{(Dd_i+Dc_i)^2}{P_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ H_i . (Dd_i + Dc_i) . \sum_{i=i+1}^n \frac{(Dd_i+Dc_i)}{P_i} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n H_i . (Dd_i + Dc_i) \quad (22)$$

$$T = \left(2 \sum_{i=1}^n Cs_i / \left[\sum_{i=1}^n H_i . \frac{(Dd_i+Dc_i)^2}{P_i} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ H_i . (Dd_i + Dc_i) . \sum_{i=i+1}^n \frac{(Dd_i+Dc_i)}{P_i} \right\} + \sum_{i=1}^n H_i . (Dd_i + Dc_i) \right] \right)^{1/2} \quad (23)$$

Algoritma prosedur solusi model dengan pendekatan kalkulus adalah:

- Langkah 1: Memastikan asumsi model terpenuhi, dengan melakukan perhitungan terhadap persamaan (3) dan persamaan (4). Jika asumsi model terpenuhi, maka lanjut ke Langkah 2. Jika tidak, maka permasalahan tidak dapat diselesaikan dengan model yang telah dirancang.
- Langkah 2: Menghitung nilai *T** berdasarkan persamaan (23), lanjut ke Langkah 3.
- Langkah 3: Menghitung nilai *m** berdasarkan persamaan (20). Jika *m** bernilai integer, maka lanjut ke Langkah 4. Jika *m** bernilai non integer, maka lanjut ke Langkah 5.
- Langkah 4: Menghitung total biaya persediaan-produksi berdasarkan persamaan (17).
- Langkah 5: Menghitung total biaya persediaan-produksi berdasarkan persamaan (17) dengan melakukan pembulatan terhadap nilai *m*. Perhitungan dilakukan untuk nilai *m* dengan pembulatan ke atas (*round up*) dan pembulatan ke bawah (*round down*). Nilai *m* dengan total biaya terkecil dipilih sebagai solusi terbaik.

4.3.2. Pendekatan Simultan

Pendekatan simultan dilakukan untuk mendapatkan kedua nilai variabel keputusan (waktu siklus, *T* dan frekuensi pengiriman, *m*) secara bersamaan. Pendekatan simultan dilakukan dengan bantuan *software* LINGO V14.0. Formulasi solusi model adalah:

$$Min TIPC = TPC + TSC + TIC + TDC$$

$$\begin{aligned} S/t \\ (Dd_i + Dc_i) &\leq P_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{(Dd_i+Dc_i)}{P_i} &\leq 1 \\ TP &\leq T \end{aligned}$$

$$T, m > 0$$

$$m \text{ merupakan bilangan integer} \quad (24)$$

4.4. Verifikasi Model

Verifikasi (validasi internal) model merupakan tahapan yang dilakukan untuk memeriksa model matematis yang sudah diformulasikan, apakah sudah benar secara logika dan matematis serta penggunaan data. Verifikasi model dilakukan dengan uji dimensi dan uji optimasi.

4.4.1. Uji Dimensi

Uji dimensi dilakukan dengan memperhatikan kesesuaian dimensi pada ruas kanan dengan ruas kiri dari persamaan matematis. Uji dimensi dilakukan terhadap persamaan total biaya persediaan-produksi (persamaan 17). Berdasarkan uji dimensi, maka dinyatakan bahwa model matematis *verified*.

$$\frac{Rp}{Time} = \left(\frac{Unit}{Time} + \frac{Unit}{Time}\right) \frac{Rp}{Unit} + \frac{Rp}{Time} +$$

$$Time \cdot \frac{Rp}{Unit \cdot Time} \cdot \frac{\left(\frac{Unit}{Time} + \frac{Unit}{Time}\right)^2}{\frac{Unit}{Time}} + Time \cdot \frac{Rp}{Unit \cdot Time} \cdot \left(\frac{Unit}{Time} + \frac{Unit}{Time}\right) +$$

$$\frac{Unit}{Time} \cdot \frac{\left(\frac{Unit}{Time} + \frac{Unit}{Time}\right)}{\frac{Unit}{Time}} + Time \cdot \frac{Rp}{Unit \cdot Time} \cdot \left(\frac{Unit}{Time} + \frac{Unit}{Time}\right) +$$

$$Time \cdot \frac{Unit}{Time} \cdot \left(\frac{Rp}{Unit \cdot Time} - \frac{Rp}{Unit \cdot Time}\right) + \frac{Rp}{Time} + \left(\frac{Unit}{Time} + \frac{Unit}{Time}\right) \cdot \frac{Rp}{Unit} \quad (25)$$

$$\frac{Rp}{Time} = \frac{Rp}{Time} \approx \text{verified} \quad (26)$$

4.4.2. Uji Optimasi

Uji optimasi merupakan pengujian untuk menentukan bagaimana model menghasilkan titik kritis (nilai optimum). Uji optimasi dilakukan untuk membuktikan bahwa model memiliki titik minimum (dikarenakan fungsi tujuan model adalah minimasi).

Untuk membuktikan model matematis memiliki titik optimum (minimum), maka model harus memenuhi kondisi pada persamaan 27, persamaan 28 dan persamaan 29.

$$\frac{\partial^2 TIPC}{\partial T^2} > 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 TIPC}{\partial m^2} > 0 \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial^2 TIPC}{\partial T^2}\right) \left(\frac{\partial^2 TIPC}{\partial m^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 TIPC}{\partial T \partial m}\right)^2 > 0 \quad (29)$$

Pembuktian:

$$\frac{\partial^2 TIPC}{\partial T^2} = \frac{2 \sum_{i=1}^n Cs_i}{T^3} + \frac{2(m \cdot Cf)}{T^3} \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 TIPC}{\partial^2 m} = \frac{T}{m^3} \sum_{i=1}^n Dd_i \cdot (Hc_i - H_i) \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 TIPC}{\partial T \partial m} = -\frac{1}{2m^2} \sum_{i=1}^n Dd_i \cdot (Hc_i - H_i) - \frac{Cf}{T^2} \quad (32)$$

$$\left(\frac{2 \sum_{i=1}^n Cs_i}{T^3} + \frac{2(m \cdot Cf)}{T^3}\right) \left(\frac{T}{m^3} \sum_{i=1}^n Dd_i \cdot (Hc_i - H_i)\right) - \left(-\left\{\frac{1}{2m^2} \sum_{i=1}^n Dd_i \cdot (Hc_i - H_i) + \frac{Cf}{T^2}\right\}\right)^2 > 0 \quad (33)$$

Dikarenakan nilai $Cs_i > 0$; $m > 0$; $Cf > 0$; dan $T > 0$, maka persamaan 27 terpenuhi. Model matematis akan memiliki nilai optimum jika $(Hc_i - H_i) > 0$ dan persamaan 33 terpenuhi.

Contoh numerik digunakan untuk memperlihatkan hasil pengujian model yang telah dirancang. Contoh numerik dilakukan untuk prosedur solusi model dengan metode kalkulus dan pendekatan simultan (*software* Lingo V14.0). Contoh numerik menggunakan data pada Tabel 1 dan hasil prosedur model dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 1. Data untuk Contoh Numerik

Parameter	Produk 1	Produk 2	Produk 3	Produk 4	Produk 5	Produk 6	
Permintaan Diskrit	4,047,500	744,100	3,472,500	1,730,750	10,729,200	42,026,551	Lembar / Tahun
Permintaan Kontinu	0	0	7,673,560	500,000	6,989,500	2,116,000	Lembar / Tahun
Laju Produksi	90,720,000	108,864,000	90,720,000	108,864,000	90,720,000	108,864,000	Lembar / Tahun
Biaya Setup	Rp 20,000,000	20,000,000	20,000,000	20,000,000	20,000,000	20,000,000	/ Setup
Biaya Produksi	Rp 3,000	2,300	3,000	2,300	3,000	2,300	/ Lembar
Biaya Simpan	Rp 440	440	440	440	440	440	/ Lembar.Tahun
Biaya Simpan di Konsumen	Rp 880	880	880	880	880	880	/ Lembar.Tahun
Biaya Variabel Pengiriman	Rp 100	100	100	100	100	100	/ Lembar
Biaya Tetap Pengiriman	Rp		2,500,000				/ Pengiriman

Tabel 2. Hasil Prosedur Solusi Model

Variabel Keputusan	Metode Kalkulus	Pendekatan Simultan	
T^*	0.06218	0.06264	Tahun Hari
m^*	5	5	Kali/Siklus
TIPC	Rp 219,342,227,852.19	219,340,000,000.00	/ Tahun

Berdasarkan Tabel 2, diketahui bahwa hasil prosedur solusi model dengan metode kalkulus dan pendekatan simultan tidak terlalu berbeda. Kebijakan optimum untuk waktu siklus adalah 0.06264 tahun dengan frekuensi pengiriman 5 kali dalam satu siklus. Walaupun waktu siklus dan frekuensi pengiriman tidak terlalu berbeda antara metode kalkulus dan pendekatan simultan, total biaya persediaan-produksi memiliki perbedaan, pendekatan simultan menghasilkan total biaya yang lebih kecil, yaitu sebesar

Rp 2,227,852.19 per tahun dari metode kalkulus atau sebesar 0.001% per tahun dari metode kalkulus.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini menghasilkan model penentuan ukuran lot produksi dan frekuensi pengiriman produk yang optimum dengan mempertimbangkan dua jenis permintaan (permintaan diskrit dan kontinu) secara bersamaan pada produksi *multi item*. Model matematis yang dihasilkan pada penelitian ini diselesaikan dengan 2 prosedur solusi model, yaitu metode kalkulus dan pendekatan simultan (dengan bantuan *software* Lingo V14.0). Model yang dihasilkan masih memiliki beberapa batasan, sehingga masih bisa dilakukan pengembangan untuk penelitian selanjutnya, seperti mempertimbangkan *safety stock*, *backorder* atau *lost sales*, mempertimbangkan kapasitas pengiriman, jumlah konsumen yang lebih dari satu serta kebijakan pengiriman produk hanya terbatas terhadap produk tertentu saja (tidak semua produk yang dikirimkan ke konsumen).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] R.H. Ballou. *Business Logistics Management: Planning, Organizing, and Controlling the Supply Chain*. (Ed. 4). New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [2] D. Waters. *Inventory Control and Management*. London: John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [3] J. Garcia-Laguna, L.A. San-Jose, L.E. Cardenas-Barron, dan J. Sicilia. The Integrality of The Lot Size in The basic EOQ and EPQ Models: Applications to Other Production-Inventory Models. *Applied Mathematics and Computation*, 216, pp 1660-72, 2010.
- [4] A.A. Taleizadeh, S.S. Kalantari, dan L.E. Cardenas-Barron. Determining Optimal Price, Replenishment Lot Size and Number of Shipments for an EPQ Model with Rework and Multiple Shipments. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 11 (4), pp 1059-71, 2015.
- [5] Y.S.P. Chiu, S.W. Chiu, C.Y. Li, dan C.K. Ting. Incorporating Multi-Delivery Policy and Quality Assurance into Economic Production Lot Size Problem. *Journal of Scientific and Industrial Research*, 68, pp 505-12, 2009.
- [6] K.K. Chen dan S.W. Chiu. Replenishment Lot Size and Number of Shipments for Model Derived without Derivates. *Mathematical and Computational Applications*, 16 (3), pp 753-60, 2011.
- [7] L.E. Cardenas-Barron, G. Trevino-Garza, A. Widyadana, dan H.M. Wee. A Constrained Multi-Products EPQ Inventory Model with Discrete Delivery Order and Lot Size. *Applied Mathematics and Computation*, 230, pp 359-70, 2014.
- [8] Y.S.P. Chiu, M.F. Wu, S.W. Chiu, dan H.H. Chang. A Simplified Approach to The Multi-Item Economic Production Quantity Model with Scrap, Rework, and Multi-Delivery. *Journal of Applied Research and Technology*, 13, pp 472-76, 2015.
- [9] N. Oktavia, Henmaidi, dan Jonrinaldi. Pengembangan Model Economic Production Quantity (EPQ) dengan Sinkronisasi Demand Kontinu dan Diskrit secara Simultan. *Jurnal Optimasi Sistem Industri*, 15 (1), pp 78-86, 2016.
- [10] B. Pal, S.S. Sana, dan K. Chaudhuri. A Mathematical Model on EPQ for Stochastic Demand in An Imperfect Production System. *Journal of Manufacturing System*, 32, pp 260-70, 2013.
- [11] R.J. Tersine. *Principles of Inventory and Materials Management*. (Ed. 4). New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- [12] S.H.R. Pasandideh dan S.T.A. Niaki. A Genetic Algorithm Approach to Optimize A Multi Products EPQ Model with Discrete Delivery Orders and Constrained Space. *Applied Mathematical and Computation*, 195, pp 506-14, 2008.
- [13] K.N.F. Leung. A Generalized Geometric-Programming Solution to "An Economic Production Quantity Model with Flexibility and Reliability Considerations". *European Journal of Operational Research*, 176, pp 240-51, 2007.
- [14] B. Sarkar, L.E. Cardenas-Barron, M. Sarkar, dan M.L. Singgih. An Economic Production Quantity Model with Random Defective Rate, Rework Process and Backorders for Single Stage Production System. *Journal of Manufacturing Systems*, 33, pp 423-35, 2014.
- [15] P.T. Chang dan C.H. Chang. An Elaborative Unit Cost Structure-Based Fuzzy Economic Production Quantity Model. *Mathematical and Computer Modelling*, 43, pp 1337-56, 2006.
- [16] H.G. Daellenbach. *Systems and Decision Making: A Management Science Approach*. England: John Wiley & Sons Ltd., 1995.
- [17] H.G. Daellenbach dan D.C. McNickle. *Management Science: Decision Making Through Systems Thinking*. Hampshire: Palgrave Macmillan, 2005.

NOMENKLATUR

Nomenklatur 1 (Gambar 2)

- H_1 : Jumlah produksi yang sesuai spesifikasi
 H : Total produksi produk
 λ : Jumlah permintaan produk per tahun
 P : Laju produksi secara konstan per tahun
 d : Laju produksi produk cacat
 P_1 : Laju produksi untuk kegiatan rework
 t_1 : Waktu untuk kegiatan produksi reguler
 t_2 : Waktu untuk kegiatan produksi rework
 t_3 : Waktu untuk kegiatan pengiriman permintaan secara diskrit
 t_n : Waktu untuk satu kali pengiriman
 T : Waktu siklus

Nomenklatur 2 (Persamaan 1 dan 2)

- P_i : Biaya produksi produk i per unit
 R_i : Jumlah permintaan produk i per tahun
 m : Jumlah run produksi per tahun
 p_i : Laju produksi produk i
 r_i : Laju permintaan produk i
 C_i : Biaya *setup* produk i per run produksi
 H_i : Biaya simpan produk i per unit per tahun

Nomenklatur 3 (Gambar 3)

- H : Persediaan maksimal ketika kegiatan produksi berakhir (unit)
 t_1 : Lama waktu produksi pada satu siklus (tahun)
 t_2 : Waktu yang diperlukan untuk mengirimkan produk pada satu siklus (tahun)
 $I(t)$: Jumlah persediaan pada waktu t (unit)
 D : *Demand* total (unit/tahun)
 D_D : *Demand* diskrit (unit/tahun)
 D_C : *Demand* kontinu (unit/tahun)
 p : Laju produksi (unit/tahun)
 i : Interval pengiriman demand diskrit (tahun)
 T : Panjang waktu siklus (tahun)

Nomenklatur 4 (Parameter dan Fungsi Tujuan Model)

Parameter:

- i : indeks jenis produk ($i=1, 2, 3, \dots, n$)
 Dd_i : permintaan diskrit untuk produk i (unit/tahun)
 Dc_i : permintaan kontinu untuk produk i (unit/tahun)
 Qd_i : ukuran lot produksi permintaan diskrit untuk produk i (unit)
 Qc_i : ukuran lot produksi permintaan kontinu untuk produk i (unit)
 P_i : laju produksi untuk produk i (unit/tahun)
 H_i : biaya simpan untuk produk i (Rp/unit.tahun)
 Hc_i : biaya simpan yang ditanggung konsumen untuk produk i (Rp/unit.tahun)
 Cf : biaya tetap untuk satu kali pengiriman pengiriman (Rp)
 Cv_i : biaya variabel pengiriman produk i per unit (Rp/unit)
 Cp_i : biaya produksi produk i per unit (Rp/unit)
 Cs_i : biaya satu kali *setup* untuk produksi produk i (Rp)
 w : waktu pengiriman permintaan diskrit untuk satu kali pengiriman (tahun)
 TP_i : waktu produksi untuk memproduksi produk i (tahun)
 TP : total waktu produksi untuk memproduksi semua jenis produk (tahun)
 TPC : total biaya produksi (Rp/tahun)
 TSC : total biaya *setup* (Rp/tahun)
 TIC : total biaya simpan (Rp/tahun)
 TDC : total biaya pengiriman (Rp/tahun)
 $TIPC$: total biaya persediaan-produksi (Rp/tahun)
- Variabel keputusan:
- T : waktu siklus (tahun)
 m : frekuensi pengiriman produk dalam satu siklus (bilangan integer)